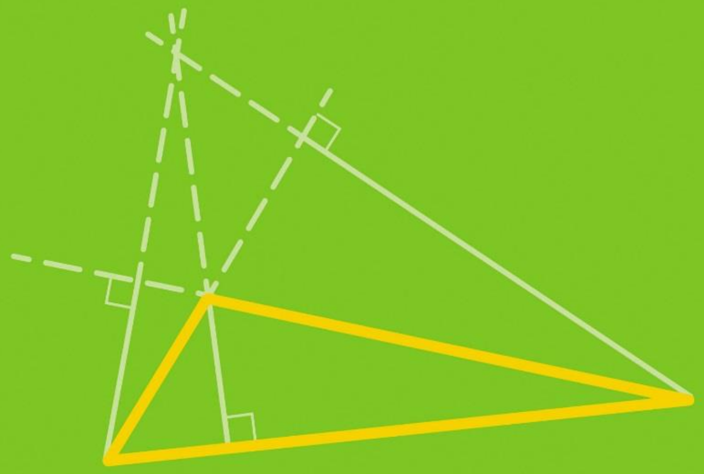
Решение геометрических задач при помощи шести стандартных вопросов

(на примере тем, рассмотренных в учебнике «Геометрия»
для 7 класса авторов Атанасяна Л. С. и др.)

Н. В. Лахова

ГЕОМЕТРИЯ

за 7 занятий



7

в) Начерти тупой угол AOD и во внутренней его области два луча OB и OC, образующие прямой угол BOC.

Найди $\angle AOD$, если $\angle AOB = 10°$ и $\angle COD = 15°$.

г) Начерти острый угол MAK, во внутренней его области — луч AP и внутри угла MAP — луч AN.

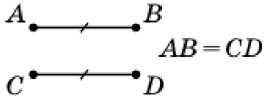
Найди угол NAP, если $\angle MAN = 14°$, $\angle PAK = 16°$, а $\angle MAK = 70°$.

В конце книжки есть раздел «Проверь свое решение».

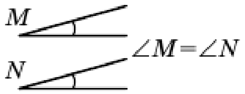
Конспект № 2

Равенство фигур. Середина отрезка. Биссектриса угла. Измерение отрезков

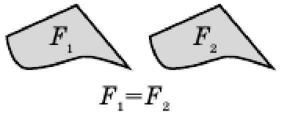
1. Две геометрические фигуры называют **равными**, если их можно **совместить** наложением.



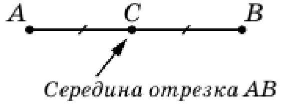
Равные отрезки отмечают одинаковыми штрихами



Равные углы отмечают одинаковыми дугами

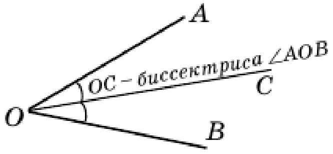


Равные фигуры F_1 и F_2

2. 

Середина отрезка — это **точка**, которая делит его пополам (на 2 равных отрезка).

$AC = CB = AB : 2 = 36$ мм $: 2 = 18$ мм.

3. 

Биссектриса угла — это **луч**, исходящий из вершины угла, и делящий его пополам (на 2 равных угла).

$\angle AOC = \angle COB = \angle AOB : 2 = 42° : 2 = 21°$.

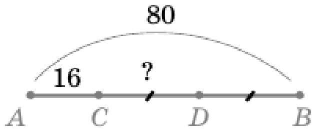
4. Длина отрезка — это расстояние между его концами.

Единицы измерения длины:
1 миллиметр — 1 мм,
1 сантиметр — 1 см = 10 мм,
1 дециметр — 1 дм = 10 см = 100 мм,
1 метр — 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм,
1 километр — 1 км = 1000 м

Конец конспекта

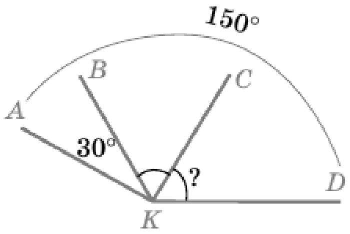
Решим вместе

2)

а) 

Дано: $AB = 80$ м, $AC = 16$ м, D — середина CB.
Найти: CD.

Решение:
1) $CB = AB - AC = 80 - 16 = 64$ (м);
2) $CD = CB : 2 = 64 : 2 = 32$ (м).
Ответ: $CD = 32$ м.

б) 

Дано: $\angle AKD = 150°$, $\angle AKB = 30°$, KC — биссектриса $\angle BKD$.
Найти: $\angle CKD$.

Решение:
1) $\angle BKD = \angle AKD - \angle AKB = 150° - 30° = 120°$;
2) $\angle CKD = \angle BKD : 2 = 120° : 2 = 60°$.

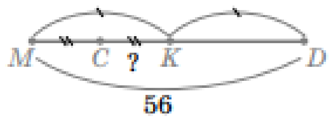
Ответ: $\angle CKD = 60°$.

Реши сам

2. а) Серединой отрезка MD является точка K, и серединой MK — точка C. Найди CK, если $MD = 56$ мм.

б) Угол AMB — развернутый. MK — его биссектриса, а MC — биссектриса угла KMB. Найди $\angle CMB$.

2. а)



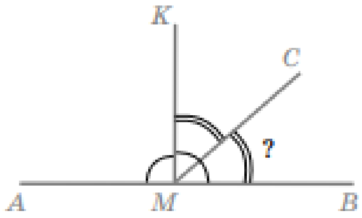
Дано: $MD = 56$ мм,
K — середина MD,
C — середина MK.
Найти: CK.

Решение:

1) $MK = MD : 2 = 56 : 2 = 28$ (мм);
2) $CK = MK : 2 = 28 : 2 = 14$ (мм).

Ответ: $CK = 14$ мм.

б)



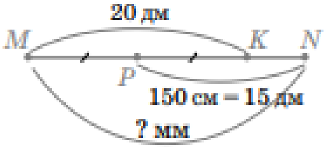
Дано:
$\angle AMB = 180°$,
MK — бисс. $\angle AMB$,
MC — бисс. $\angle KMB$.
Найти: $\angle CMB$.

Решение:

1) $\angle KMB = \angle AMB : 2 = 180° : 2 = 90°$;
2) $\angle CMB = \angle KMB : 2 = 90° : 2 = 45°$.

Ответ: $\angle CMB = 45°$.

3.



Дано:
$MP = PK$, $MK = 20$ дм,
$PN = 150$ см.
Найти: MN в мм.

Анализ:

1) $MN = MP + PN$, MP — ?
2) $MP = MK : 2 = 20$ дм $: 2 = 10$ дм.

Решение:

$PN = 150$ см $= 15$ дм;
1) $MP = MK : 2 = 20 : 2 = 10$ (дм), т. к. $MP = PK$ по усл.;
2) $MN = MP + PN = 10 + 15 = 25$ (дм) $= 250$ см $= 2500$ мм.

Ответ: $MN = 2500$ мм.

Задачу можно было решить другим способом, но он длиннее.

Реши сам

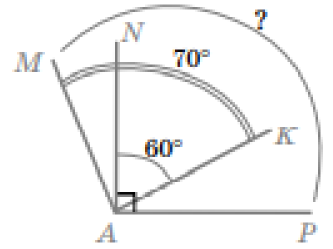
3. Отрезку MN принадлежит отрезок PK, так что точка P лежит между точками M и K. P — середина MK.

Найди расстояние между точками M и N, если $MK = 20$ дм, $PN = 150$ см.

Ответ дай в миллиметрах.

Решим вместе

4) Прямой угол NAP лежит во внутренней области угла MAP. Луч AK проходит между лучами AN и AP. Найдем угол MAP, если $\angle NAK = 60°$, а $\angle MAK = 70°$.

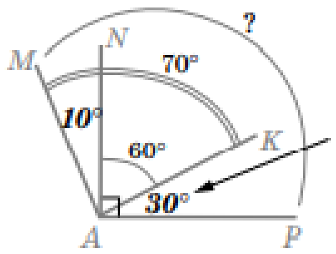


Дано:
$\angle NAP = 90°$,
$\angle MAK = 70°$,
$\angle NAK = 60°$.

Найти: $\angle MAP$.

1 способ

Анализ: 1) $\angle MAP = \angle MAK + \angle KAP$; $\angle KAP$ — ?
2) $\angle KAP = \angle NAP - \angle NAK = 90° - 60° = 30°$.



Сведения, которые мы получаем в процессе решения, удобно отметить на чертеже другим цветом или в скобках. Здесь они будут выделены на чертежах более яркими цифрами или линиями.

Решение:
1) $\angle KAP = \angle NAP - \angle NAK = 90° - 60° = 30°$;
2) $\angle MAP = \angle MAK + \angle KAP = 70° + 30° = 100°$.

2 способ

Анализ: 1) $\angle MAP = \angle NAP + \angle MAN$, $\angle MAN$ — ?
2) $\angle MAN = \angle MAK - \angle NAK = 70° - 60° = 10°$
(*10° отметим на чертеже*).

Решение: 1) $\angle MAN = \angle MAK - \angle NAK = 70° - 60° = 10°$;
2) $\angle MAP = \angle NAP + \angle MAN = 90° + 10° = 100°$.

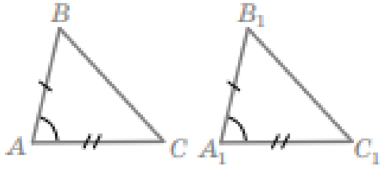
Ответ: $\angle MAP = 100°$.

ЗАНЯТИЕ 3. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный и равносторонний треугольники

Конспект № 6

Признаки равенства треугольников

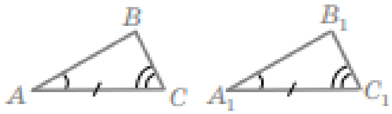
I признак. По двум сторонам и углу между ними.



Если **2 стороны и угол между ними** одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$,
значит, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
по I признаку.

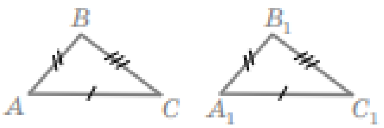
II признак. По стороне и двум прилежащим к ней углам.



Если **сторона и 2 прилежащих к ней угла** одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

$AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$,
значит, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
по II признаку.

III признак. По трем сторонам.



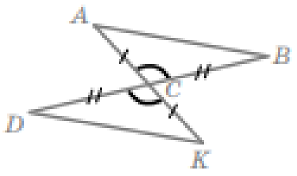
Если **3 стороны** одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$,
значит, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$
по III признаку.

Конец конспекта

Решим вместе

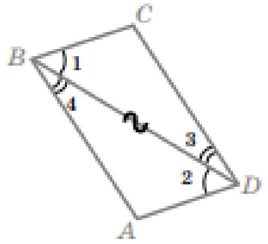
1) а)



Дано:
C — середина DB и AK.
Доказать:
$\Delta ACB=\Delta DCK$.

Доказательство:
$AC=CK$, $DC=CB$ по условию. $\angle ACB=\angle DCK$ (вертикальные), значит, $\Delta ACB=\Delta DCK$ по I признаку.

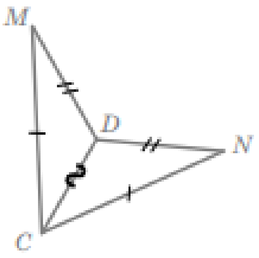
б)



Дано:
$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.
Доказать:
$\Delta ABD=\Delta BCD$.

Доказательство:
BD — общая сторона у ΔABD и ΔBCD, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ по условию, значит, $\Delta ABD=\Delta BCD$ по II признаку.

в)



Дано:
$MC=CN$, $MD=DN$.
Доказать:
$\Delta CMD=\Delta CDN$.

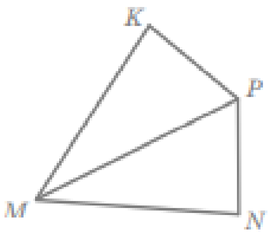
Доказательство:
$MC=CN$, $MD=DN$ по условию. CD — общая сторона, значит, $\Delta MCD=\Delta DCN$ по III признаку.

Заметим, что каждый раз мы искали в треугольниках **по три пары равных элементов**, причем таких, которые **необходимы** для применения одного из признаков равенства.

Реши сам

1. Докажи равенство треугольников на рис. а, б, в.

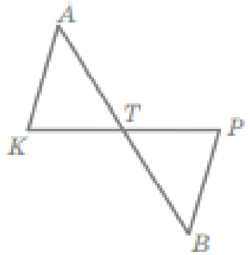
а)



Дано:
$KP = PN$,
$\angle KPM = \angle MPN$.
Доказать:
$\Delta MKP = \Delta MPN$.

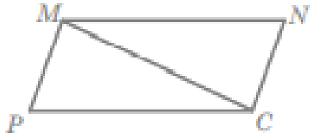
Напоминаю, что при оформлении решений можно использовать сокращения. Их перечень смотри на стр. 114–115.

б)



Дано:
$\angle A = \angle B$,
$AT = TB$.
Доказать:
$\Delta AKT = \Delta TPB$.

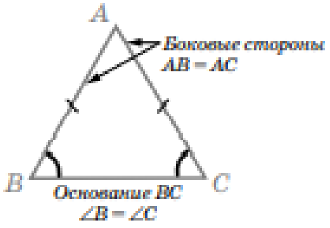
в)



Дано:
$MN = PC$,
$MP = NC$.
Доказать:
$\Delta MPC = \Delta MNC$.

Конспект № 7

Равнобедренный и равносторонний треугольники



Равнобедренным (р/б) называют треугольник, у которого 2 стороны равны. Их называют **боковыми**, а третью сторону — **основанием**.

Свойство 1. В равнобедренном треугольнике **углы при основании равны.**

Так как в ΔABC $AB = AC$, то $\angle B = \angle C$.

Список сокращений и обозначений, в том числе общепринятых, для 7 класса

Сокращения

бисс. — биссектриса
вертик. углы — вертикальные углы
гипот. — гипотенуза
доп. постр. — дополнительное построение
док-во — доказательство
док-ть — доказать
зн. — значит
и т.д. — и так далее
и т.п. — и тому подобное
кол-во — количество
леж. — лежащий, лежащая
мед. — медиана
наиб. — наибольший, наибольшая
накр. леж. углы — накрест лежащие углы
одностор. углы — односторонние углы
окр. — окружность
опред. — определение
осн. — основание
остр. — острый, остроугольный
отр. — отрезок
паралл. — параллельный, параллельны
перпенд. — перпендикуляр, перпендикулярна
по п. 1 — по пункту № 1
постр. — построение
по усл. — по условию
провед. — проведённые, проведённых
проп. — пропорция
рав-во — равенство
расст. — расстояние
рассм. — рассмотрим
р/б — равнобедренный
р/с — равносторонний
п/у — прямоугольный
св-во — свойство
сек. — секущая

след. — следовательно
соотв. углы — соответственные углы
станд. — стандартное
стор. — сторона, стороны
т.к. — так как
теор. — теорема
т-ка — точка
тр-к — треугольник
удовл. — удовлетворяет
ур-ние — уравнение
фиг. — фигура
ч. т. д. — что и требовалось доказать
эл-т — элемент

Обозначения

a; b — катеты;
c — гипотенуза;
D; d — диаметр;
h — высота;
ч. — часть, части, частей;
R; r — радиус;
ρ — расстояние;
$\rho(A; MN)$ — расстояние от точки A до прямой MN.

Конспект № 8

Основные вопросы к решению задачи и их применение

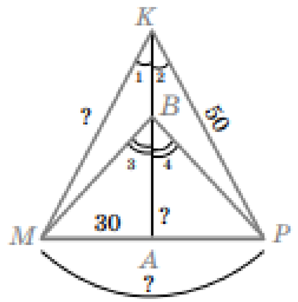
Вопрос 1 (В1). В какой геометрической фигуре находится элемент, о котором идет речь? **Чем** он в этой фигуре **является**?

Вопрос 2 (В2). Что известно об этой фигуре в задаче и какими свойствами она обладает?

Вопрос 3 (В3). Чего не хватает для решения (доказательства)?

Перепиши эти вопросы на кусок картона и всё время держи их перед глазами.

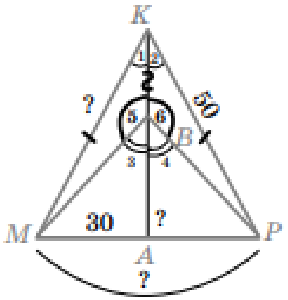
Решим вместе

3) 

Дано: $\triangle MKP$,
$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$KP = 50$ см, $MA = 30$ см.

Найти:
а) MK, б) $\angle KAP$, в) MP.

Анализ:	Анализ кратко:
Вероятно, $MK = KP$. Докажем это. **Путь I. В1.** (*Ответ на вопрос № 1.*) MK и KP — стороны $\triangle MKP$. **В2.** KA — биссектриса $\triangle MKP$ ($\angle 1 = \angle 2$). Для доказательства $MK = KP$ этого недостаточно. *Вернёмся к вопросу № 1.*	**Путь I.** 1) MK и KP в $\triangle MKP$. $\angle 1 = \angle 2$. Нет.



Совет. *Скопируй исходный чертеж на листок бумаги и* ***двигай*** *его по ходу решения вдоль страницы, отмечая* ***другим цветом*** *найденные величины и связи между ними.*
Здесь они выделены жирными линиями.

Путь II.
1) **В1.** MK и KP — стороны $\triangle MKB$ и $\triangle KPB$.
В2. $\angle 1 = \angle 2$, KB — общая сторона, видимо $\triangle MKB = \triangle KPB$.
В3. Для док-ва этого не хватает 3-й пары равных элементов. Может быть $\angle 5 = \angle 6$ — ? (Тогда получится II признак рав-ва тр-ков.)
2) **В1 и 2.** $\angle 5$ и $\angle 6$ — смежные с $\angle 3 = \angle 4$, значит, $\angle 5 = \angle 6$.

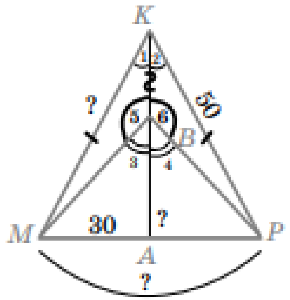
Путь II.
1) MK и KP в $\triangle MKB$ и $\triangle KPB$, $\angle 1 = \angle 2$, KB — общая.
2) $\angle 5$ и $\angle 6$ — ?
Смежные с $\angle 3 = \angle 4$.
II признак.

Запись первой части решения

Теперь нужно, начиная с конца анализа, записать первую часть решения задачи (см ниже), а после этого вернуться к остальным вопросам задачи.
Эта линия означает перерыв на запись очередной части решения.

3) В1. $\angle KAP$ лежит между биссектрисой KA и основанием MP равнобедренного (р/б) $\triangle MKP$. **В2.** В р/б треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является его высотой и медианой, следовательно, $KA \perp MP$ и $AP = MA = 30$ см.	3) $\angle KAP$ — ? KA — бисс. р/б $\triangle MKP$, значит, она высота и медиана.

Запись второй части решения



Дано:
$\triangle MKP$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
$KP = 50$ см, $MA = 30$ см.
Найти:
а) MK, б) $\angle KAP$, в) MP.

Решение:
1) $\angle 5 = 180° - \angle 3$ (смежные), $\angle 6 = 180° - \angle 4$ (смежные), но $\angle 3 = \angle 4$, (по усл.), значит, $\angle 5 = \angle 6$ (*отметим это на чертеже*).
2) В $\triangle MKB$ и $\triangle KPB$: $\angle 1 = \angle 2$ по усл., KB — общая сторона, $\angle 5 = \angle 6$ по п. 1 (*то есть по пункту 1 решения*), значит, $\triangle MKB = \triangle KPB$ по II признаку. След., $MK = KP = 50$ см (лежат против $\angle 5 = \angle 6$) (Св-во элементов равных тр-ков.)

Вернемся к анализу задачи.

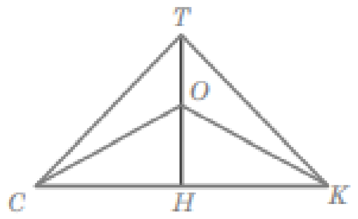
3) Так как $MK = KP$ (по п. 2), то $\triangle MKP$ — р/б и KA (бисс. по усл.) является его высотой ($KA \perp MP$) и медианой ($AP = MA$).
Значит, $\angle KAP = 90°$ и $MP = 2MA = 2 \cdot 30 = 60$ (см).
Ответ: $MK = 50$ см, $\angle KAP = 90°$, $MP = 60$ см.

Конец конспекта

Теперь реши эту же задачу самостоятельно.

Реши сам

3.



Дано:
$CT=TK$, $CO=OK$,
$\angle COT=110°$.
$\angle CTK=92°$, $CK=50$ см.

Найти:
CH, $\angle CTO$, $\angle CHO$, $\angle HOK$.

Постарайся решить задачу двумя способами.

Замечания.

1. Если задача имеет несколько способов решения, и в условии не сказано, каким именно способом её надо решить, отметка не может быть снижена за менее рациональный (но правильный!) способ решения.

2. Постепенно мы будем находить приёмы решения, которые используют очень часто. Например, в задаче 3) мы задействовали один из приёмов доказательства перпендикулярности: «Если в **равнобедренном** треугольнике к основанию проведена биссектрисса или медиана, то она **перпендикулярна** основанию». Назовём его свойством биссектриссы, медианы и **высоты равнобедренного** треугольника.

Все приёмы для решения геометрических задач, которые мы изучим в 7 классе, собраны **на странице** 117 этой книжки.

Чтобы вовремя о них вспомнить, добавим в **перечень вопросов** к решению задачи еще один дополнительный вопрос (**В6**): «Какой **приём** нужно использовать?» (см. стр. 116).

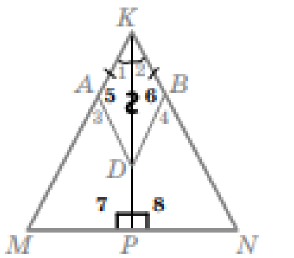
Решим вместе

4) В ΔMKN на высоте KP взята точка D. На сторонах MK и KN отмечены точки A и B соответственно, так что $AK=KB$. Известно, что $\angle MKP=\angle PKN$.

Докажем, что $\angle MAD=\angle DBN$, $AM=BN$ и точка P равноудалена от концов отрезка MN.

Совет.

Чтобы правильно начертить чертеж, прочитай условие задачи до конца и пользуйся тем, что **надо** доказать так, **будто ты это уже доказал.**



Дано:
ΔMKN, $KP\perp MN$,
$AK=KB$, $\angle 1=\angle 2$.

Док-ть:
$\angle 3=\angle 4$, $AM=BN$,
$MP=PN$.

Анализ:	Краткая запись анализа:	
1) **В1.** $\angle 3$ и $\angle 4$ — смежные с $\angle 5$ и $\angle 6$, которые лежат в ΔAKD и ΔKDB. **В2.** В них $AK-KB$, KD — общая, $\angle 1-\angle 2$, тр-ки равны. Зн., $\angle 5=\angle 6$. *Запишем первую часть доказательства (см. ниже п. 1 и п. 2).*	1) $\angle 3$ и $\angle 4$ смежн. с $\angle 5$ и $\angle 6$. 2) док-ть: $\Delta AKD=\Delta KDB$ по I призн., зн., $\angle 5=\angle 6$.	Запись 1
2) **В1.** AM и BN — части сторон MK и KN ΔMKN. **В2.** $AK=KB$ по усл. **В3.** Надо док-ть, что $MK=KN$. 3) **В1.** MK и KN — стороны ΔMKP и ΔKPN. **В2.** KP — общая, $\angle 1=\angle 2$ по усл., $\angle 7=\angle 8$ (прямые). Тр-ки равны по II призн. *Запишем вторую часть доказательства (п. 3 и п. 4).*	3) $AM=MK-AK$, $BN=KN-KB$ и $AK=KB$ по усл. 4) надо док-ть $\Delta MKP=\Delta KPN$ по II призн.	Запись 2
4) $MP=PN$ из равенства ΔMKP и ΔKPN.	5) $MP=PN$ из	Запись 3

Доказательство (*кратко: док-во*):

1) В ΔAKD и ΔKDB: $AK=KB$ по усл., $\angle 1=\angle 2$ по усл., KD — общая, значит, $\Delta AKD=\Delta KDB$ по I признаку, след., $\angle 5=\angle 6$ (по св-ву эл-тов).

2) $\angle 3=180°-\angle 5$, $\angle 4=180°-\angle 6$ (смежные), но $\angle 5=\angle 6$ по п.1, значит, $\angle 3=\angle 4$ (**$\angle MAD=\angle DBN$**).

3) В ΔMKP и ΔKPN: KP — общая сторона, $\angle 1=\angle 2$ по усл., $\angle 7=\angle 8$, т.к. $KP\perp MN$ по усл., значит, $\Delta MKP=\Delta KPN$ по II признаку, след. $MK=KN$ (по св-ву эл-тов).

4) $AM=MK-AK$, $BN=KN-KB$, но $MK=KN$ по п. 3, $AK=KB$ по усл., значит, **$AM=BN$**.

5) Т. к. $\Delta MKP=\Delta KPN$ (по п. 3), то **$MP=PN$** (по св-ву эл-тов).

Стандартные дополнительные построения

1. В задачах на построение **соедини** полученные точки так, чтобы **получились фигуры**, свойствами которых можно воспользоваться для доказательства. (Обычно это треугольники.)

2. Опусти **перпендикуляр** из точки на прямую, если нужно найти или использовать **расстояние** между ними.

Приёмы для решения геометрических задач (7 класс)

1. Приёмы доказательства **перпендикулярности**:
   — Свойство биссектрисы, медианы и **высоты равнобедренного** треугольника;
   — Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой;
   — Данный треугольник равен прямоугольному треугольнику;
   — Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны;
   — Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

2. **Замена.**
   — Если что-то (отрезок, угол и т.п.) найти или доказать трудно, замени это на равное или связанное с ним.

3. Приёмы доказательства **равенства отрезков**:
   — Из равенства треугольников;
   — Боковые стороны в равнобедренном треугольнике;
   — Радиусы одной окружности;
   — Найти величины отрезков и сравнить их;
   — Свойство биссектрисы, **медианы** и высоты **равнобедренного** треугольника.

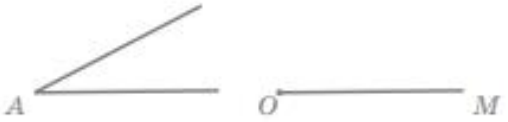
4. Приёмы доказательства **равенства углов**:
   — Из равенства треугольников;
   — Углы при основании равнобедренного треугольника;
   — Накрест лежащие и соответственные углы при параллельных прямых и секущей;
   — Найти величины углов и сравнить их;
   — Свойство **биссектрисы**, медианы и высоты **равнобедренного** треугольника.

Элементарные задачи на построение

Решим вместе

3) Построим **угол**, равный данному.

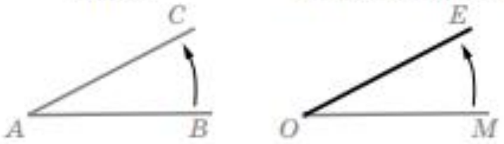
Дано:
$\angle A$, луч OM.
Построить:
$\angle MOE = \angle A$.



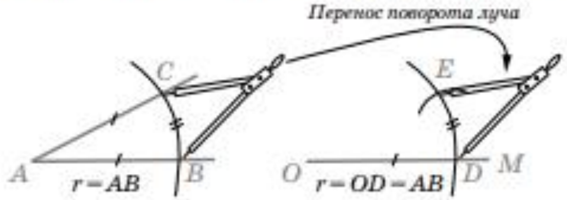
Анализ:

Анализ в задачах на построение начинают с того, что изображают фигуру, которую нужно построить, чтобы было легче составить план этого построения.

Дано: Нужно построить:



Для построения нужно повернуть луч OE от луча OM вокруг точки O так, как повернут луч AC от луча AB вокруг точки A. Поворот удобно отмерять **по дуге**, поэтому нужно провести две дуги **одинаковых радиусов** с центрами в точках A и O, и по ним уже отмерить повороты лучей. Величину радиуса можно взять любой.



Циркулем измерим расстояние CB и из точки D по дуге DE отложим это расстояние, сделав «засечку», то есть проведя маленькую дужку.

Получится точка E. Проведя луч OE, получим искомый $\angle MOE$.

В тетради построение должно сопровождаться кратким описанием выполняемых действий.

Оформление решения:

Дано:
$\angle A$, луч OM.
Построить:
$\angle MOE = \angle A$.

Рис. 1

Пишут не «дуга», а окружность.

Построение: 1) Окр. $(A;\ AB)$, AB — любое;
2) Окр. $(O;\ OD)$, $OD = AB$;
3) Окр. $(D;\ DE)$, $DE = BC$;
4) Луч OE.

$\angle MOE$ — искомый.

Дальше нужно доказать, что полученная фигура — именно то, что требовалось построить. В данном случае следует доказать, что $\angle MOE = \angle A$.

Анализ:

Посмотрим на рис. 1

В1: «В какой геометрической фигуре находится элемент, о котором идет речь?»

$\angle A$ и $\angle MOE$ находятся в фигурах, напоминающих треугольники, — две стороны у них отрезки, а третья — дуга. Поскольку нам известны признаки равенства **треугольников**, то следует сделать **дополнительное построение:** соединить отрезками точки C и B, а также точки E и D (см. рис. 2). Таким образом мы ответили ещё на один вопрос к решению задачи (**В5**): «Какое **дополнительное построение** нужно сделать?» (см. стр. 116 и 117).

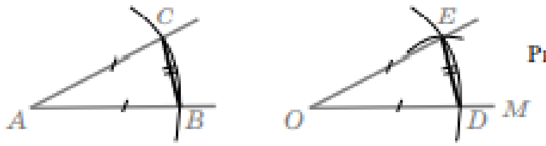


Рис. 2

В2: «Что известно об этой фигуре?».

По построению $AC = OE$, $AB = OD$ (одинаковые радиусы);

$DE = BC$ (одинаковые радиусы), значит, $\Delta OED = \Delta ACB$ по трем сторонам.

Доказательство:

Доп. постр.: отрезки CB и ED.

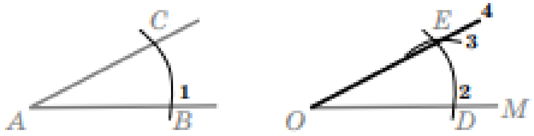
В ΔACB и ΔOED: $AC = OE$, $AB = OD$, $CB = ED$ по построению, значит, $\Delta ACB = \Delta OED$ по трем сторонам, след., $\angle MOE = \angle A$.

Конспект № 10

Элементарные задачи на построение

1) Построение угла, равного данному.

Дано:
$\angle A$, луч OM.
Построить:
$\angle MOE = \angle A$.

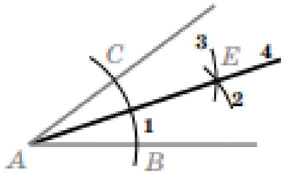


Построение: 1) Окр. $(A;\ AB)$; AB — любое;
2) Окр. $(O;\ OD)$; $OD = AB$;
3) Окр. $(D;\ DE)$; $DE = BC$;
4) Луч OE.
$\angle MOE$ — искомый.

Замечание.
В задачах на построение все вспомогательные элементы, например дуги, не стирают, они указывают на ход решения.

2) Построение биссектрисы угла.

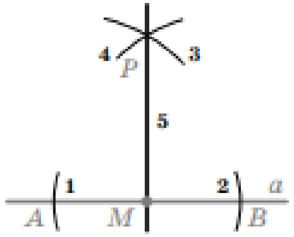
Дано: $\angle A$.
Построить: биссектрису.



Построение:
1) Окр. $(A;\ AB)$; AB — любое;
2) Окр. $(B;\ BE)$; $BE > CB : 2$;
3) Окр. $(C;\ CE)$; $CE = BE$;
} точка E.
4) Луч AE — искомая биссектриса $\angle A$.

3) Через точку, **лежащую** на данной прямой, провести к ней **перпендикулярную** прямую.

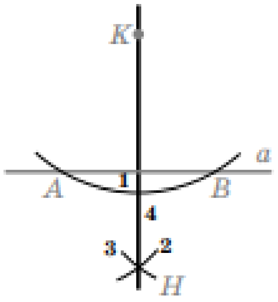
Дано: Прямая a, $M \in a$.
Построить: $PM \perp a$.



Построение:
1) Окр. $(M;\ MA)$, MA — любое;
2) Окр. $(M;\ MB)$, $MB = MA$;
3) Окр. $(A;\ AP)$, $AP > AM$;
4) Окр. $(B;\ BP)$, $BP = AP$;
} точка P.
5) Прямая PM — искомая.

4) Через точку, **не** лежащую на данной прямой, провести к ней **перпендикулярную** прямую.

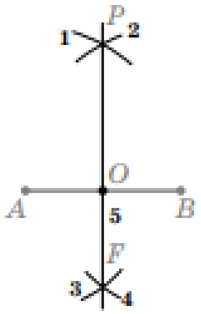
Дано:
Прямая a, $K \notin a$.
Построить: $KH \perp a$.



Построение:
1) Окр. $(K;\ KA)$ пересекает a в A и B.
2) Окр. $(A;\ AH)$, $AH > AB : 2$;
3) Окр. $(B;\ BH)$, $BH = AH$;
} точка H.
4) Прямая KH — искомая.

5) Построение середины отрезка.

Дано:
Отрезок AB.
Построить:
$O \in AB$, чтобы $AO = OB$.



Построение:
1) Окр. $(A;\ AP)$, $AP > AB : 2$;
2) Окр. $(B;\ BP)$, $BP = AP$;
} точка P.
3) Окр. $(A;\ AF)$, $AF > AB : 2$;
4) Окр. $(B;\ BF)$, $BF = AF$;
} точка F.
5) $PF \cap AB = O$, O — искомая точка.

Конец конспекта

Популярная литература по психологии:

С. В. Кривцова «Учитель и проблемы дисциплины»;
М.Е. Литвак «Если хочешь быть счастливым»;
Карен Прайор «Не рычите на собаку»;
Дэвид Стайбел «Когда слова вредят делу»;

В. Р. Дольник «Непослушное дитя биосферы» (Беседы о поведении человека в компании птиц, зверей и детей);

Анна Быкова «Секреты спокойствия «Ленивой мамы»;
Окунев А. А. «Спасибо за урок, дети!» (математик).

Вебинар «Как организовать повторение математики» и другие

на сайте лахова. рф

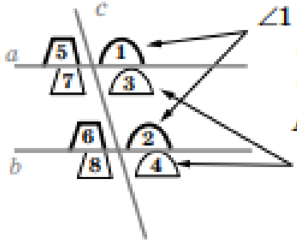


Рис. 4

$\angle 1$ и $\angle 2$ — **соответственные** (ноги **на** ступеньки ставим **соответственно** сверху).

Аналогично $\angle 5$ и $\angle 6$ — соответственные.

$\angle 3$ и $\angle 4$ — **соответственные** углы (бьем носками ботинок под ступеньки **соответственно** снизу).

Аналогично $\angle 7$ и $\angle 8$ — соответственные.

Соответственные углы либо оба **над**, либо оба **под** прямыми a и b.

Конец конспекта

Начерти две прямые, пересеки их секущей и назови все пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов.

Конспект № 12

Теоремы и аксиомы. Аксиома параллельных прямых

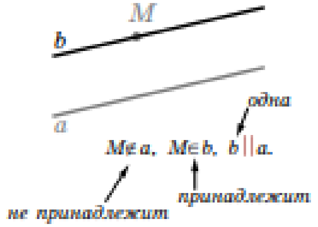
Геометрия — наука о свойствах геометрических фигур. Каждое **свойство** можно назвать **утверждением** о чем-то.

Теорема — утверждение, которое **можно доказать** путем рассуждений (как решение в задаче).

Аксиома — утверждение, доказать которое **нельзя**, настолько оно простое и очевидное.

Например, I признак равенства треугольников можно доказать. Это — теорема.

Утверждение: «Через 2 точки можно провести только одну прямую» доказать нельзя. Это — аксиома.



Аксиома параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит **только одна** прямая, параллельная данной.

Следствие 1 из аксиомы (теорема 1)

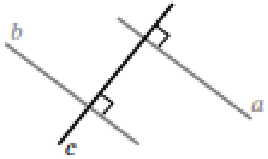
Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересечет и другую.

$$\text{Т.к. } a \parallel b \text{ и } \underset{\text{(пересекает)}}{c \cap a}\text{, то } \underset{\text{(пересекает)}}{c \cap b}.$$

Следствие 2 из аксиомы (теорема 2)

Если 2 прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Т.к. $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$.



Теорема 3

Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Т.к. $a \parallel b$ и $c \perp b$, то $c \perp a$.

Конец конспекта

Конспект № 13

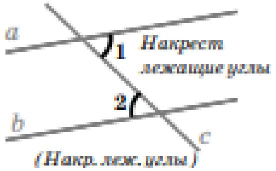
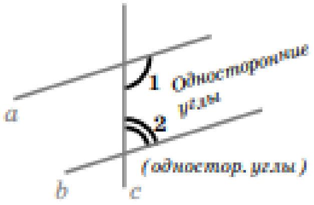
Прямая и обратная теоремы. Признаки параллельности и свойства параллельных прямых

Прямая теорема: дано $\boxed{a}$, нужно доказать $\boxed{b}$.

Обратная теорема: дано $\boxed{b}$, нужно доказать $\boxed{a}$.

Условие теоремы — *Заключение теоремы*

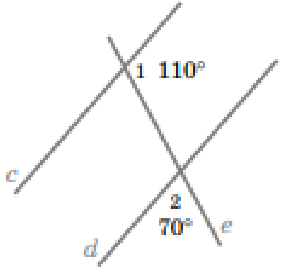
В обратной теореме **условие** и **заключение** прямой теоремы **поменялись** местами.

Чертеж	**Признаки** параллельности	**Свойства** параллельных прямых (обратная теорема)
	Если при пересечении двух прямых секущей **накрест лежащие углы равны,** то прямые параллельны. Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.	Если 2 параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны. Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$.
	Если при пересечении двух прямых секущей **соответственные углы равны,** то прямые параллельны. Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.	Если 2 параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны. Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$.
	Если при пересечении двух прямых секущей **сумма односторонних углов равна 180°,** то эти прямые параллельны. Если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$.	Если 2 параллельные прямые пересечены секущей, то **сумма** односторонних углов равна **180°**. Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

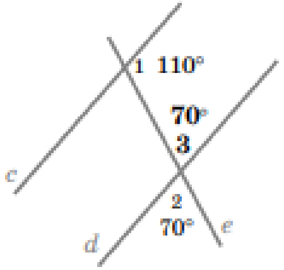
Конец конспекта

Решим вместе

1) а)



Дано:
$\angle 1 = 110°$, $\angle 2 = 70°$.
Доказать: $c \parallel d$.



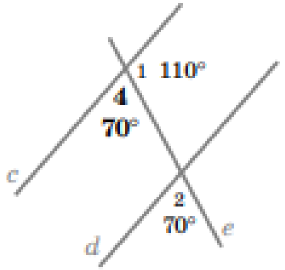
1 способ

Анализ:

В1. $\angle 1$ и $\angle 2$ без названия, но $\angle 1$ и $\angle 3$ одностор. при c, d и сек. e.
$\angle 3 = \angle 2$ (вертик.).

Решение:

$\angle 3 = \angle 2 = 70°$ (вертикальные). $\angle 1 + \angle 3 = 110° + 70° = 180°$ и они односторонние при прямых c, d и секущей e, значит, $c \parallel d$.



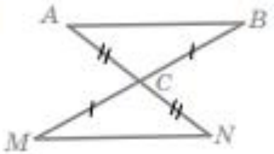
2 способ

Анализ:

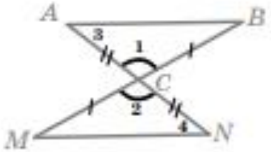
В1. $\angle 1$ и $\angle 2$ без названия, но $\angle 4$ и $\angle 2$ соотв. при c, d и сек. e.
$\angle 4 = 180° - \angle 1$ (смежные).

Решение:

$\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (смежные), значит, $\angle 4 = 180° - \angle 1 = 180° - 110° = 70°$.
$\angle 4 = 70°$ и $\angle 2 = 70°$ (по условию). $\angle 4 = \angle 2$ и они соответственные при прямых c, d и секущей e, значит, $c \parallel d$.

б) 

Дано:
$AC = CN$,
$BC = CM$.
Доказать: $AB \| MN$.

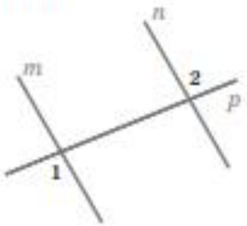


Анализ:
В1. $\angle 3$ и $\angle 4$ — накрест лежащие углы при AB, MN и секущей AN.
Но $\angle 3$ и $\angle 4$ — в ΔABC и ΔMCN.
В2, 3. Если доказать, что $\Delta ABC = \Delta MCN$, то $\angle 3 = \angle 4$ и можно будет применить признак параллельности.

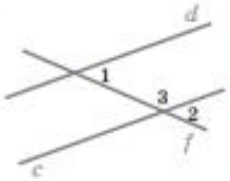
Решение (*даны сокращения*):
В ΔABC и ΔMCN: $AC = CN$, $BC = CM$ по усл., $\angle 1 = \angle 2$ (вертик.), значит, $\Delta ABC = \Delta MCN$ по I признаку. След., $\angle 3 = \angle 4$, но они накр. леж. при AB, MN и сек. AN, значит, $AB \| MN$.

Заметим, что в обеих задачах **мы искали** пары углов, о которых говорится **в признаках** параллельности.

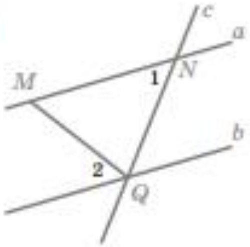
Реши сам

1. а) 

Дано:
$\angle 1 = \angle 2$.
Доказать:
$m \| n$.

б) 

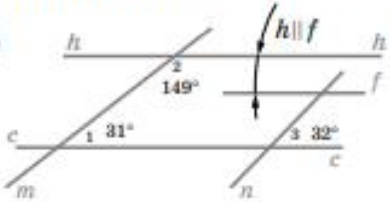
Дано:
$\angle 1 = 20°$,
$\angle 2 : \angle 3 = 1 : 8$.
Доказать:
$d \| c$.
Реши двумя способами.

в) 

Дано:
$\angle 1 = \angle 2$,
$MQ = QN$.
Доказать:
$a \| b$.

Решим вместе

Повтори сначала конспект № 12.

2) 

Дано:
$h \| f$, $\angle 1 = 31°$, $\angle 2 = 149°$;
$\angle 3 = 32°$.
Найдем, сколько общих точек имеют прямые f и c, m и f, m и n.

Анализ:
Чтобы найти, сколько общих точек имеют 2 прямые, нужно определить, будут ли они параллельны (нет общих точек), или будут пересекаться (1 общая точка).

а) f и c —? **Путь I. В1.** f и c пересечены n, но про угол между f и n ($\angle fn$) ничего не известно.
Путь II. В1. Рядом с f и c есть прямая h.
В2. $h \| f$ (и наоборот: $f \| \boldsymbol{h}$) по условию.
В3. Для применения следствия 2 из аксиомы не хватает $\boldsymbol{c \| h}$.
В1. c и h пересечены m.
В2. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (односторонние).

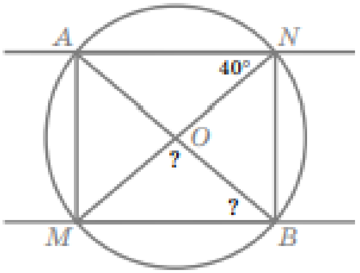
б) m и f —? *То, что на рисунке видно, что m пересечёт f решением не является. Это пересечение еще нужно доказать.*
В1. и **В2.** m пересекает c и h; $h \| f$ по условию.
Применим следствие 1 из аксиомы.
в) m и n —? **В1.** Их пересекает c.
В2. $\angle 1 \neq \angle 3$ (соответственные).

Решение:
1) $\angle 1 + \angle 2 = 31° + 149° = 180°$ и они одностор. при h, c и сек. m, значит, $c \| h$.
2) $h \| f$ по усл., то есть $f \| h$.
3) $c \| h$ и $f \| h$, значит, $c \| f$, (следствие 2 из аксиомы); c и f не имеют общих точек.
4) $h \| f$ по усл. $m \cap h$ по усл., значит, $m \cap f$ (следствие 1 из аксиомы); m и f имеют 1 общую точку. ↑*пересекает*
5) $\angle 1 = 31°$, $\angle 3 = 32°$ по усл., значит, $\angle 1 \neq \angle 3$. Это соотв. углы при m, n и сек. c, значит, $m \nparallel n$, то есть $m \cap n$; m и n имеют 1 общую точку. ↑*не параллельна*

Ответ: c и f не имеют общих точек, m и f, m и n имеют по одной общей точке.

Решим вместе

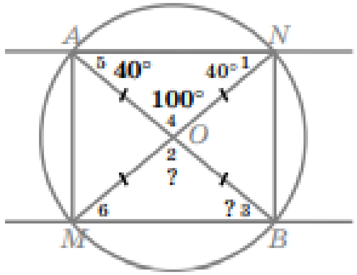
5) В окружности O проведены диаметры AB и MN. Точки, лежащие на окружности, соединены хордами. Найдем $\angle MOB$ и $\angle MBA$, если $\angle ANM = 40°$. Определим, сколько общих точек имеют прямые AN и MB.



Дано:
окр. O,
$\angle ANM = 40°$.

Найти:
а) $\angle MOB$, $\angle MBA$;
б) число общих точек AN и MB.

Для краткости нужные нам углы по мере необходимости будем обозначать номерами.



Анализ:

Здесь нам поможет четвертый (вспомогательный) вопрос:

*«Что можно **легко определить** в данной задаче?».*

Ответ: Заметим, что O — центр окружности, значит, $OA = ON = OB = OM$ как её радиусы, следовательно, все треугольники с вершинами в точке O — равнобедренные.

Отметим это на чертеже и будем отвечать на основные вопросы.

I путь. В1. $\angle 2$ в ΔMOB. **В2.** Он р/б, углы неизвестны.

II путь. 1) *Здесь нам поможет вопрос № 6: «Какой приём нужно использовать?». Подойдёт приём «Замена» (см. стр. 117).*
В6. $\angle 2 = \angle 4$ (вертик.). **В1.** $\angle 4$ в ΔAON. **В2.** Он р/б, зн., $\angle 5 = \angle 1 = 40°$, но $\angle 4 + \angle 5 + \angle 1 = 180°$, зн., $\angle 4 = 180° - (\angle 5 + \angle 1)$.

---

2) **В1.** $\angle 3$ в ΔMOB. **В2.** Он р/б, зн., $\angle 3 = \angle 6$.
$\angle 3 + \angle 6 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 100°$, зн., $\angle 3 = \angle 6 = (180° - \angle 2) : 2$.

---

3) Нужно выяснить, прямые AN и MB будут пересекаться, или они параллельны. (*Вспомним признаки параллельности прямых.*) Удобно использовать секущие MN или AB, так как уже доказано, что накрест лежащие углы при AN, MB и любой из этих секущих равны.

Решение:

Заметим, что $OA = ON = OB = OM$ как радиусы окр. O.
1) Т.к. $OA = ON$, то есть ΔAON р/б, зн., $\angle 5 = \angle 1 = 40°$ (при основании).
2) В ΔAON $\angle 4 = 180° - (\angle 1 + \angle 5) = 180° - (40° + 40°) = 100°$; $\angle 4 = 100°$.
3) $\angle 2 = \angle 4 = 100°$ (вертик.); $\boldsymbol{\angle MOB = 100°}$.
4) Т. к. $OM = OB$ (см. «Заметим»), то есть ΔMOB — р/б, зн., $\angle 6 = \angle 3$.
5) В ΔMOB $\angle 3 = \angle 6 = (180° - \angle 2) : 2 = (180° - 100°) : 2 = 40°$.
$\boldsymbol{\angle MBA = 40°}$.
6) $\angle 1 = 40°$ по усл., $\angle 6 = 40°$ по п. 5, зн., $\angle 1 = \angle 6$. Это накр. леж. углы при AN, MB и сек. MN, зн., $AN \parallel MB$ и не имеют общих точек.

Ответ: $\angle MOB = 100°$, $\angle MBA = 40°$; нет общих точек.

Вопросы
к решению геометрической задачи

Основные

1. **(В1) В какой геометрической фигуре** находится элемент, о котором идёт речь? **Чем** он в этой фигуре **является**?

Например, элемент находится в ΔABC и является в нем медианой.

2. **(В2) Что известно** об этой фигуре в задаче, и какими **свойствами** она обладает?
   - Уясни себе данные задачи.
   - Выбери свойства фигуры, которые могут помочь;
   - Подумай, на что похож чертёж;
   - Вспомни формулы, теоремы, относящиеся к делу;
   - Если фигур несколько, подумай, как они могут быть связаны (равенство, подобие, части и т.п.).
3. **(В3) Чего не хватает** для решения (доказательства)?
   - Вспомни определения, признаки, сравни их с тем, что известно.

Дополнительные

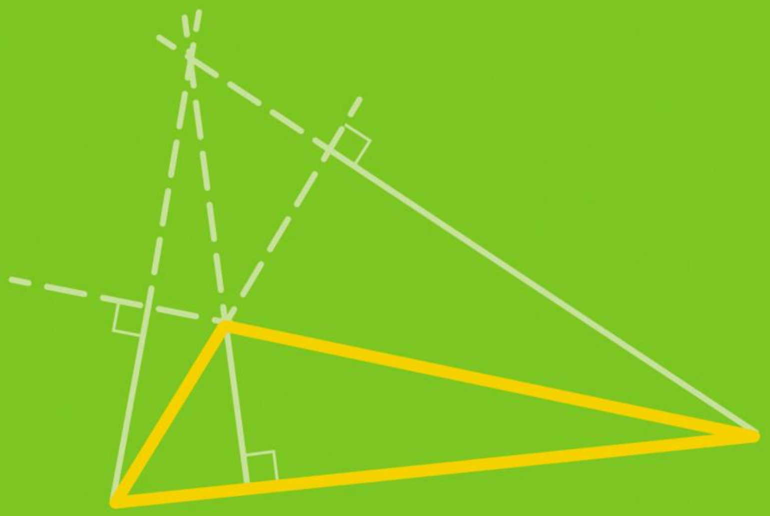
4. **(В4)** Что можно **легко определить** в данной задаче?
   - Если нет других идей, то найди все элементы и связи между ними, которые можно легко определить, и ситуация должна проясниться;
     В анализе задачи и записи решения этот поиск удобно начать словами: «Заметим, что...»
5. **(В5)** Какое **дополнительное построение** нужно сделать?
   - Вспомни стандартные дополнительные построения (см. перечень на стр. 117);
   - Подумай, на что похоже расположение элементов на чертеже, и что хочется туда добавить для полноты картины.
6. **(В6)** Какой **приём** нужно использовать? (См. перечень на стр. 117.)

СМИО ПРЕСС

Н. В. Лахова

ГЕОМЕТРИЯ

ЗА 7 ЗАНЯТИЙ



7

В книге представлена авторская методика изучения геометрии, которая поможет:

- Понять все темы курса геометрии 7 класса.
- Научиться анализировать и решать задачи.
- Быстро повторить пройденный материал.
- Подготовиться к контрольным или самостоятельным работам.

Книга будет особенно полезна тем, кто учится в спортивных или художественных школах, кто вынужденно пропускал занятия по болезни или другим причинам.

ISBN 978-5-7704-0371-8

9 785770 403718

Приёмы для решения геометрических задач в 8 классе

1.- 4. из 7 класса

5. **Формула**. Используй формулу, которая связывает известные и неизвестные величины.

6. **Приравнивание**. Приравняв периметры, площади и т.п. можно найти неизвестные элементы.

7. **Сумма-разность.** Длину отрезка, угол, площадь или объём можно найти как сумму или разность отрезков, углов, площадей или объёмов.

8. **Перемещение.** При нахождении площади, части фигуры можно отделять и перемещать в более удобные места.

Стандартные дополнительные построения 8 кл.

Иногда помогают вопросы:

1. Какое нужно сделать дополнительное построение, чтобы на чертеже появился недостающий элемент формулы, или фигура, свойствами которой можно воспользоваться. (Чаще всего это треугольник.)

2. На что похожа та или иная часть чертежа? Может быть достроить её до целого?

Совет: проще соединить две имеющиеся точки, а потом доказать, что этот отрезок - то, что нужно (высота, биссектриса и т. п.), чем сначала построить нужный элемент, а потом доказывать, что он пройдёт именно через заданную точку.

Стандартные дополнительные построения

1) Проведи в фигуре **высоту** (в равнобедренной трапеции лучше сразу две), особенно, если в задаче нужно найти площадь фигуры. Высоту следует проводить **в наиболее информативной части** фигуры (об элементах которой известно больше всего).

2) Соедини **точки на окружности с её центром**, получишь равные радиусы.

3) Проведи **радиус в точку касания**, он перпендикулярен к касательной.

4) Соедини **вершину** многоугольника **с центром вписанной окружности** – получишь биссектрису его угла**.**

5) Проведи **биссектрисы односторонних углов** при параллельных прямых. Биссектрисы пересекутся под прямым углом.

6) Если в окружность **вписан равнобедренный треугольник**, проведи **диаметр окружности через вершину**, противоположную основанию. На этом диаметре будут лежать высота, биссектриса, медиана и серединный перпендикуляр треугольника.

7) Соедини **середину стороны** многоугольника с **центром описанной** окружности, получишь серединный перпендикуляр.

8) В **равностороннем треугольнике** проведи **две медианы** (они же высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры). Точка их пересечения – центр вписанной и описанной окружности. Медиана равна сумме их радиусов.

9) Соедини **точку окружности с концами диаметра**. Получишь прямой угол и прямоугольный треугольник.

10) Построй **вписанные углы, опирающиеся на одну дугу**. Они равные.

11) **Построй треугольник**, если его не хватает для нахождения нужного элемента.

12) Опусти **перпендикуляр** из точки на прямую, если нужно найти или использовать **расстояние** между ними.


БЫСТРО И ЭФФЕКТИВНО
Н. В. Лахова
Математика
за 7 занятий
5
класс
БЫСТРО И ЭФФЕКТИВНО
Н. В. Лахова
Математика
за 7 занятий
6
БЫСТРО И ЭФФЕКТИВНО
Н. В. Лахова
Алгебра
за 7 занятий
7
класс
ПРОСВЕЩЕНИЕ
БЫСТРО И ЭФФЕКТИВНО
Н. В. Лахова
Алгебра
за 7 занятий
8
класс
ПРОСВЕЩЕНИЕ
БЫСТРО И ЭФФЕКТИВНО
Н. В. Лахова
Алгебра
за 7 занятий
9
класс
ПРОСВЕЩЕНИЕ

Конспект № 12

Решение задач при помощи уравнений

ВИДЫ ПРОЦЕССОВ

Процесс	Величины, характеризующие процесс	Связь между величинами
Движение	s — путь v — скорость t — время	$s = v \cdot t$
Работа	A — работа N — производительность t — время	$A = N \cdot t$
Торговля	*Ст* — стоимость *Ц* — цена *к* — количество	*Ст* = *Ц* · *к*
Сортировка	Q — общее количество q — количество в 1 мере k — количество мер	$Q = q \cdot k$

ВОПРОСЫ

1. О **каких величинах** идёт речь?
   а) О каком **процессе** идёт речь и какими величинами он характеризуется?
   б) Сколько **этапов** содержит этот процесс (или сколько **объектов** в нём участвуют)?
2. Какие величины **известны** и что нужно **найти**?
3. **Как связаны величины в задаче?** (Это самый главный вопрос.)
4. Какую величину **удобно обозначить** буквой x и как **выразить** через неё другие неизвестные величины?
5. Какая **связь** между величинами осталась **неиспользованной**? (На основании этого условия составь уравнение.)
6. (Дополнительный вопрос.) **Легко ли решить** полученное уравнение? (Отвечая на этот вопрос, нужно подумать, не следует ли взять за x другую величину и для составления уравнения использовать иную связь между величинами.)

КОНЕЦ КОНСПЕКТА

14 Рабочий изготовил в начале смены 2 детали за полчаса и подумал, что если будет продолжать работать в том же темпе, то ему придётся потратить на выполнение этого заказа ещё 40 мин после перерыва. Поэтому рабочий стал делать каждую деталь на 3 мин быстрее и сдал заказ ещё за 20 мин до перерыва. Каков размер заказа? Через какое время после начала смены наступает перерыв?

ВОПРОС 1. Задача на работу характеризуется тремя величинами — A, N, t, значит, нам понадобятся 3 строчки в таблице. Речь идёт о **возможном** варианте работы, о **фактическом** и об **оптимальном**, когда рабочий точно уложился бы в срок до перерыва. Значит, нужны 3 столбца в таблице. Будем рассматривать в таблице не всю работу, а только ту её часть ($A_{ост}$), которую рабочий мог сделать тремя способами.

весь заказ A

2 шт. | *остаток* ($A_{ост.}$)

30 мин. | *время на изготовление остатка*

$\frac{1}{2}$ часа

ВОПРОС 2. Данные задачи нужно перевести в удобную для нас форму:

$$40\text{ мин} = \frac{40\text{ мин}}{\underbrace{60\text{ мин}}_{1\text{ ч}}} = \frac{2}{3}\text{ ч};\quad 20\text{ мин} = \frac{20\text{ мин}}{\underbrace{60\text{ мин}}_{1\text{ ч}}} = \frac{1}{3}\text{ ч}.$$

Производительность $N_{возм} = 2$ дет. за полчаса, значит, за час он сделал бы 4 детали, то есть $N_{возм} = 4$ дет./ч.

Фактически он делал 1 деталь за время:

$$30\text{ мин} : 2\text{ дет.} - 3\text{ мин} = 15 - 3 = 12\text{ (мин)}.$$

Найдём, сколько деталей он сделал в час (60 мин).

1 дет. за 12 мин
x дет. за 60 мин

Пропорция:

$$\frac{1}{x} = \frac{12}{60};\quad x = \frac{1\cdot\cancel{60}^{5}}{\cancel{12}_{1}} = 5\text{ (дет./ч)};$$

$$N_{факт} = 5\text{ дет./ч}.$$

Величины	Возможно	Фактически	Оптимально
$A_{ост}$, дет.	$4\left(x+\frac{2}{3}\right)$	$5\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$	?
	о д и н а к о в а я		
N, дет./ч	4	5	
t, ч	$x+\frac{2}{3}$ на $\frac{2}{3}$ б	$x-\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{3}$ м	x ?

ВОПРОС 3. Связи в столбцах: $A = N\cdot t$. В строчках: все остатки работы одинаковые. $A_{возм} = A_{факт} = A_{опт}$.

ВОПРОС 4. Пусть x ч — время, оставшееся до перерыва ($t_{опт}$), тогда рабочий мог потратить на изготовление заказа $x+\frac{2}{3}$ ч, а потратил $x-\frac{1}{3}$ ч, при этом его работа будет выражаться соответственно: $4\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)$ деталей и $5\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$ деталей.

ВОПРОС 5. Неиспользованной осталась связь в первой строчке. Так как количество произведённых деталей в любом случае одно и то же, то можно составить уравнение

$$4\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right) = 5\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right),\qquad 4x+\frac{8}{3} = 5x-\frac{5}{3},$$

$$\frac{8}{3}+\frac{5}{3} = 5x-4x,\qquad \frac{13}{3} = x,\qquad x = 4\frac{1}{3}.$$

Время от начала смены до перерыва: $t = \frac{1}{2}+x$;

$$t = \frac{1}{2}^{\backslash 3} + 4\frac{1}{3}^{\backslash 2} = \frac{3}{6}+4\frac{2}{6} = 4\frac{5}{6} = 4\text{ ч }50\text{ мин}.$$

$$A_{ост} = 4\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right) = 4\cdot\left(\frac{13}{3}+\frac{2}{3}\right) = 4\cdot\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{3}_{1}} = 20\text{ дет}.$$

Размер заказа: $A = 2+20 = 22$ дет.

О т в е т: заказ состоит из 22 деталей. Перерыв наступает через 4 ч 50 мин после начала смены.

ПРАВИЛО

Если в задаче **не дана размерность** величины (шт., га, л и т. п.), то **прими всю величину за единицу** (1 целая работа).

15 Полную кастрюлю картошки Катя очищает за $\frac{2}{3}$ того времени, которое требуется Пете, чтобы очистить $\frac{4}{5}$ того же количества картошки. Целую кастрюлю Петя чистит на 21 мин дольше Кати. За какое время каждый из них очистит полную кастрюлю?

ВОПРОС 1. Процесс работы характеризуется тремя величинами: A, N, t. Значит, в таблице будут 3 строчки. В задаче три процесса работы: Катя очистит **полную** кастрюлю, Петя очистит $\frac{4}{5}$ **кастрюли**, и Петя очистит **полную** кастрюлю картошки, значит, нужны 3 столбца.

Координаты:

Адрес сайта Лаховой Натальи Викторовны: лахова.рф

Адрес электронной почты: nvil-58@mail.ru

Издательство «СМИО Пресс»
г. Санкт-Петербург,
ул. Седова, д. 97, к. 3
Тел. (812) 976-94-76
(911) 290-90-26 (МТС)
e-mail: smiopress@mai.ru
http://smio.ru